CENTRO UNIVERSITÁRIO DO SUL DE MINAS UNIS MG
ENGENHARIA MECÂNICA
RAFAEL DE FREITAS PINTO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: Conceitos e Aplicações

Varginha

2012

RAFAEL DE FREITAS PINTO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: Conceitos e Aplicações

Trabalho apresentado ao curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário do Sul de Minas UNIS MG para obtenção de grau de bacharel, sob a orientação do Prof. Érik Vitor da Silva.

Varginha

2012

RAFAEL DE FREITAS PINTO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: Conceitos e Aplicações

Trabalho apresentado ao curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário do Sul de Minas UNIS MG para obtenção de grau de bacharel, sob a orientação do Prof. Érik Vitor da Silva.

Aprovado ______/ _______/ _______.

____

Prof. Érik Vitor da Silva

____

____

OBS.:

Dedico este trabalho a minha família e meus amigos que me deram todo apoio para que eu pudesse concluí-lo e também ao professor Érik que me orientou quando todas as portas pareciam estar fechadas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha avó, minha amada esposa, meu filho, meus amigos, meus professores e meus colegas por terem sido de crucial importância, não só neste trabalho, mas para a minha vida acadêmica e pessoal.

"Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível. Logo estarás fazendo o impossível."

São Francisco de Assis.

RESUMO

Cálculo é o estudo de como as coisas mudam e fornece uma estrutura para modelar sistemas em que há mudança, e uma forma de deduzir as previsões dos modelos. Ele fornece uma maneira relativamente simples de construir modelos quantitativos de mudança, e deduzir suas consequências. Com isso, começa-se a capacitação de encontrar os efeitos dessas mudanças nas condições dos sistemas a serem investigados. Ao estudar estes casos, se pode aprender a controlar sistemas para que façam o que se espera que façam. O cálculo agrega aos engenheiros, por exemplo, a capacidade de sistematizar modelos e controles e lhes dá extraordinário poder sobre o mundo material. Seu desenvolvimento e suas aplicações à física e engenharia é provavelmente o fator mais importante no desenvolvimento da ciência moderna assim como foi nos dias de Arquimedes que, por sua vez, foi um dos principais responsáveis pela criação, vamos dizer assim , do cálculo e tudo que se seguiu a partir dele, incluindo quase todos os grandes avanços matemáticos dos últimos séculos. Esta citação é importante visto que analisar o cálculo historicamente representa sua importância para a humanidade através dos tempos bem como facilita sua compreensão para quem o estuda. Por fim, o objeto de estudo deste trabalho é fazer uma explanação acerca das aplicações do cálculo em diversas atividades relacionadas à varios ramos das ciências exatas tanto historicamente como em descobertas e pesquisas contemporâneas.

Palavras chave: Cálculo Diferencial e Integral. Engenharia. Aplicações.

ABSTRACT

Calculus is the study of how things change and provides a framework to model systems in which there is change, and a way to deduct the predictions of the models. It provides a relatively simple way to construct quantitative models of change, and deducing their consequences. With this, one begins training to find the effects of these changes in terms of the systems being investigated. By studying these cases, one can learn to control systems for them to do what they are expected to do. Calculating aggregates engineers, for example, the ability to systematize models and controls and gives them extraordinary power over the material world. Its development and its applications to physics and engineering is probably the most important factor in the development of modern science as the days of Archimedes which, in turn, was one of the main responsible for creation, let's say so, calculation and all that followed from it, including almost all major mathematical advances of the last few centuries. This quote is important because analysing the calculation historically represents their importance to mankind through the ages as well as facilitates their understanding for the study. Finally, the object of study of this work is to make an explanation about the applications of calculus in various activities related to various branches of Sciences both historically and in contemporary research and discoveries.

Keywords: Differential and Integral Calculus., Engineering. Applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há uma hipótese de que os alunos de engenharia, ciências da computação, entre outros cursos com aplicação de CDI (Cálculo Diferencial e Integral) , não dão a devida atenção a esta disciplina por desconhecerem suas origens históricas e o consequente desenvolvimento das teorias que culminaram com a atual forma de trabalhar esta matéria.

Um dos fatores responsável por dificuldades no aprendizado do Cálculo, diz respeito tanto a algumas metodologias aplicadas por professores, quanto pela tradicional falta de interesse dos acadêmicos nos processos iniciais de aprendizado do Cálculo, que são fundamentais para a resolução de disciplinas e problemas posteriores. Se não for bem estruturado o estudo em sua base, será consideravelmente mais difícil resolver os problemas envolvendo a referida disciplina.

A falta de uma construção histórica das teorias do Cálculo faz com que os estudantes não despertem o interesse para esta questão que poderia tornar o ensino do Cálculo mais interessante, pois se teria oportunidade de refletir sobre a forma de como se chegou aos métodos para resolução dos problemas que envolvem esta disciplina enxergando assim, de certo modo, é claro, sua real importância. Estudos da Universidade de São Paulo (USP) mostram que a maior dificuldade dos alunos reside no início dos estudos quando não se dá a devida atenção ao estudo de limites e continuidade, conceitos base para o estudo do cálculo, principalmente quando se refere à taxa de variação de movimento e quantidades. A derivada e a integral são a base para o estudo do Cálculo, e, uma vez que estes conteúdos não tenham sido bem assimilados, os acadêmicos encontrarão grandes dificuldades em concluir a disciplina.

Os estudos de cálculo tem sido motivo de muitas pesquisas no âmbito da Educação Matemática e, mais especificamente, da Física e Engenharia daí se extrai parte de sua importância.

Apesar de muitas vezes o Cálculo ser associado a algo imensamente difícil e complicado, é importante lembrar que o Cálculo foi inventado e construído para facilitar a vida das pessoas, o que nos faz refletir que, caso se saiba a forma de como o Cálculo foi construído historicamente e suas amplas aplicações, seu estudo pode tornar-se prazeroso, pois além de exercitar o intelecto, permite visualizar a solução de problemas práticos e de situações até então não imaginadas, nas quais o Cálculo pode ser aplicado como solução.

Então, pensando historicamente, seu surgimento emergiu da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências de variáveis e generalizar, em leis quantitativas, o que se é expresso analiticamente.

O Cálculo está profundamente integrado em todos os ramos das ciências físicas, como a física e a biologia. Encontra-se em ciência da computação, estatística e engenharia, em economia, negócios e medicina. Desenvolvimentos modernos, tais como arquitetura, aviação e outras tecnologias, todos fazem uso da gigantesca gama de ideias que o cálculo pode oferecer. Portanto, este conjunto de argumentos tem como objetivo demonstrar a importância do CDI ao longo da história e alinhar algumas de suas aplicações dando alguma ideia de por que ele foi e é tão útil no dia a dia das pessoas e principalmente aos estudiosos das ciências exatas, mais especificamente aos físicos e engenheiros.

2 HISTÓRIA E EVOLUÇÃO DO CÁLCULO

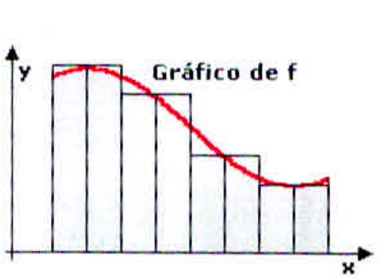
As ideias principais que formam a base do cálculo diferencial e integral foram desenvolvidas durante um longo intervalo de tempo, sendo que os primeiros passos foram dados pelos matemáticos gregos, cerca de 200 a.C., principalmente buscando soluções para problemas geométricos.

Para os gregos, e em particular para a escola de Pitágoras (pitagórica) que teve grande influência nas gerações posteriores de pensadores, o número "*1*" era considerado um átomo ou *mônada* formadora de todos os outros números. Desta forma os demais números eram compostos por uma quantidade de "*uns*" ou razões, entendidas como a divisão entre segmentos de comprimento inteiro. Daí o apreço pelos racionais e a dificuldade em aceitar números que não pertencem a este conjunto, como o número "ou". Neste sentido eles acreditavam que nem todos os comprimentos pudessem ser representados por números nem tampouco trabalhavam com números negativos além de não possuírem grande desenvolvimento em álgebra.

Entretanto, há algumas evidências de que os antigos egípcios podem ter tido alguma dica da ideia em uma data muito anterior. O Eudoxo matemático Hellenic geralmente é creditado com o método de exaustão, o que tornou possível calcular a área das regiões e o volume de sólidos.

O que permitiu a passagem do método de exaustão para o conceito de integral foi a percepção que em certos casos, a área da região pode ser calculada sempre com o mesmo tipo de aproximação por retângulos.

Fig. 1: Área sob uma curva através de aproximação por retângulos (integral).



Fonte: História Integrais. 2012. Disponível em: <www.cepa.if.usp.br>

Arquimedes aperfeiçoou este método para a prática da integração buscando encontrar áreas de figuras planas e, ao mesmo tempo, inventou métodos heurísticos que se assemelham a conceitos modernos de cálculo. De todos os matemáticos do mundo antigo, este foi o que mais próximo chegou de inventar ou descobrir o cálculo, porém não chegou às vias de fato além de que, depois dele, estudos do cálculo não avançaram sensivelmente por mais de mil anos. Segundo o livro "*A Medida do Círculo*", Arquimedes mostra que o valor exato de um número está entre e aproximação que se obtém inscrevendo e circunscrevendo um círculo em um polígono regular de 96 lados. Ele também descreve uma técnica para o cálculo de raízes além de ter inventado um sistema para a expressão de números de grande valor.

Arquimedes também enunciou teoremas fundamentais concernentes ao centro de gravidade de figuras planas e sólidos. Seu teorema mais famoso, o chamado Princípio de Arquimedes, permite o cálculo do peso de um objeto imerso em água.

Pode-se dividir a história do cálculo em alguns períodos distintos, de forma notável nas eras antiga, medieval e moderna para que se possa entender melhor sua evolução.

Na Antiguidade, foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral, calcular volumes e áreas, como citado acima, pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscow (1800 a.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um *frustum* piramidal. Eudoxus (408-355 a.C.), natural de onde hoje se encontra a Turquia, contemporâneo de Platão, usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287-212 a.C.) levou essa ideias além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. O método da exaustão foi redescoberto na China por Liu Hui no século III (263 a.C.), que o usou para encontrar a área do círculo e fornecem uma explicação geométrica bem clara para a extração de raízes quadradas. O método também foi usado por Zu Chongzhi século V, para achar o volume de uma esfera, assim como descrito em "Episódios da história antiga da matemática."

Na Idade Média, o matemático indiano Aryabhata usou a noção infinitesimal em 499 d.C. expressando-a em um problema de astronomia na forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bhāskara II no século XII a desenvolver uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do "Teorema de Rolle".

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

Luca Valério (1552-1618), um doutor em filosofia e teologia, publicou em Roma, 1604, seu livro "*De centro gravitatis*"onde empregava os métodos de Arquimedes para calcular volumes e centros de gravidade de corpos sólidos. Em 1606 ele publicou "*De quadratura parabolae*" onde empregava os métodos gregos para calcular áreas de figuras planas.

Posteriormente, Sir Isaac Newton (1643-1727) aplicou o cálculo às suas leis do movimento e a outros conceitos matemáticos físicos.

Na Idade Moderna, descobertas independentes no cálculo foram feitas no início do século XVII no Japão por matemáticos como Seki Kowa, que expandiu o método de exaustão. Na Europa, a segunda metade do século XVII foi uma época de grandes inovações. O Cálculo abriu novas oportunidades na física-matemática de resolver problemas muito antigos que até então não haviam sido solucionados. Muitos matemáticos contribuíram para essas descobertas, notavelmente John Wallis e Isaac Barrow. James Gregory proveu um caso especial do segundo teorema fundamental do cálculo em 1668.

Segundo o site da USP, História das Integrais, coube a Gottfried Wilhelm Von Leibniz e a Isaac Newton recolher essas ideias e juntá-las em um corpo teórico que viria a constituir o cálculo. A ambos é atribuída a simultânea e independente invenção do cálculo (Derivada e Integral). Leibnitz foi originalmente acusado de plagiar os trabalhos não publicados de Isaac Newton; hoje, porém, é considerado o inventor do cálculo, juntamente com Newton. Historicamente Newton foi o primeiro a aplicar o cálculo à física ao passo que Leibniz desenvolveu a notação utilizada até os dias de hoje, a "notação de Leibniz". O argumento histórico para conferir aos dois a invenção do cálculo é que ambos chegaram de maneiras distintas ao teorema fundamental do cálculo. Este afirma que a diferenciação e integração são, em certo sentido, as operações inversas. Mais precisamente, antiderivadas podem ser calculadas com integrais definidas, e *vice-versa*. Estas ideias estão também desenvolvidas na literatura de Hoffman.

- **1º Teorema Fundamental do Cálculo**: Se uma função f é função contínua no intervalo $[a, b]$ e F é uma antiderivada de f no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

- **2º Teorema Fundamental do Cálculo:** Se f é contínua em um intervalo aberto I contendo a, então, para todo x no intervalo,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Fonte: THOMAS, George B. **CÁLCULO.** Pág. 389; Pág. 392

Quando Newton e Leibniz publicaram seus resultados, houve uma grande controvérsia de qual matemático (e, portanto, que país: Inglaterra ou Alemanha) merecia o crédito. Newton derivou seus resultados primeiro, mas Leibniz publicou primeiro. Newton argumentou que Leibniz roubou ideias de seus escritos não publicados, que Newton à época compartilhara com alguns poucos membros da Sociedade Real. Esta controvérsia dividiu os matemáticos ingleses dos matemáticos alemães por muitos anos. Um exame cuidadoso dos escritos de Leibniz e Newton mostra que ambos chegaram a seus resultados independentemente, com Leibniz iniciando com integração e Newton com diferenciação. Nos dias de hoje tem-se que Newton e Leibniz descobriram o cálculo independentemente. Leibniz, porém, foi quem deu o nome cálculo à nova disciplina, Newton a chamara de "A ciência dos fluxos".

Desde o tempo de Leibniz e Newton, muitos matemáticos contribuíram para o contínuo desenvolvimento do cálculo.

Na Idade Contemporânea, já no século XIX, o cálculo foi abordado de uma forma muito mais rigorosa. Foi também durante este período que ideias do cálculo foram generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Lebesgue mais tarde generalizou a noção de integral. Sobressaíram-se matemáticos como Cauchy, Riemann, Weierstrass e Maria Gaetana Agnesi. Esta ultima, foi autora da primeira obra a unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre cálculo diferencial e da chamada "curva de Agnesi". Outros matemáticos de renome também tiveram grande importância e influência no cálculo como Jakob Bernoulli com contribuições para problemas relativos à óptica e à mecânica, René Descartes com geometria analítica, Euclides com a geometria euclidiana como um dos matemáticos mais influentes de todos os tempos, entre outros.

Vale ressaltar também que, ainda hoje, existem atividades diversas que necessitam do cálculo para seu desenvolvimento como, por exemplo, as equações de *Navier-Stokes* que basicamente descrevem o movimento de um fluido em regime turbulento através de cálculos diferenciais e integrais, tanto Newtonianos como Lagrangianos, e ainda não foram completamente desenvolvidas e, pela criação de cálculos concretos em cima desta teoria, é oferecida pelo "*Clay Mathematics Institute*" uma recompensa de U$1.000.000,00 o que faz com que qualquer estudioso atuante na área de exatas enxergue a necessidade de se aprofundar um pouco mais em tais cálculos.

3 CONSISTÊNCIA E IMPORTÂNCIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

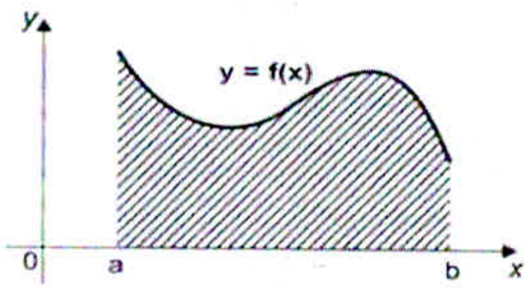
O cálculo é uma das descobertas mais importantes da matemática moderna, respondendo a perguntas que haviam intrigado os matemáticos, cientistas e filósofos por mais de dois mil anos. Ele é o estudo de como as coisas mudam e fornece uma estrutura para modelar sistemas em que há mudança, e uma forma de deduzir as previsões dos modelos.

Seu desenvolvimento e uso tiveram grandes efeitos atingindo em quase todas as áreas da vida moderna. O cálculo é a base de quase todas as ciências, especialmente a física e engenharia. Praticamente todos os desenvolvimentos modernos, tais como técnicas de construção, aviação e outras tecnologias fazem uso fundamental do cálculo. Muitas fórmulas algébricas agora utilizadas para balística, aquecimento e refrigeração, e outras ciências práticas foram trabalhados através do uso de cálculo. Em um manual, uma fórmula algébrica com base em métodos de cálculo pode ser aplicada sem saber as suas origens.

O sucesso de cálculo foi estendido ao longo do tempo para equações diferenciais, cálculo vetorial, cálculo de variações, análise complexa e topologia diferencial.

O Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal, ou simplesmente Cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada.

Fig. 2: O cálculo permite calcular a área da região assinalada através das integrais.



Fonte: UNESP, 2012. Disponível em: <http://www.calculo.iq.unesp.br/>.

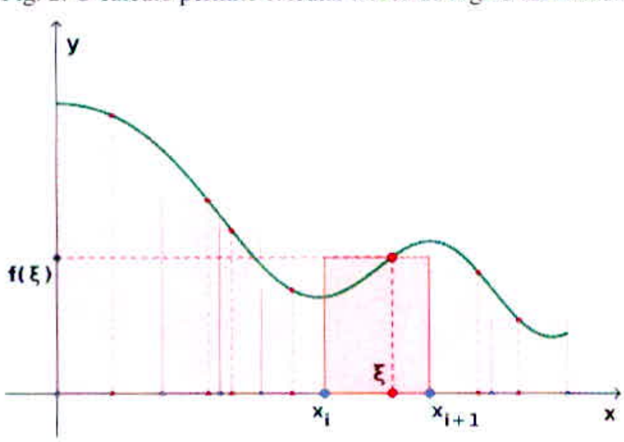
O cálculo foi criado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Desenvolvido basicamente por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-

1716), em trabalhos independentes. O Cálculo serve de auxílio em diversos conceitos e definições na matemática, química, física clássica, física moderna e economia. Aquele que estuda cálculo deve conhecer determinadas áreas da matemática, como funções, geometria e trigonometria, pois constituem a base do cálculo. O cálculo tem inicialmente três "operações-base", ou seja, possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais.

A integral indefinida, também chamada de antiderivada ou ainda derivada antiderivativa, também importante objeto de estudo no cálculo, consiste num processo que inverte a derivada de funções. Já a integral definida, inicialmente definida como Soma de Riemann, estabelece limites de integração, ou seja, é um processo estabelecido entre dois intervalos bem definidos, daí o nome integral definida.

Com o advento do "Teorema Fundamental do Cálculo" estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O professor de Isaac Newton em Cambridge, Isaac Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o cálculo em um método matemático sistemático. Particularmente ambos viram que o Teorema Fundamental os capacitou a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de soma (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss).

Fig. 2: O cálculo permite calcular a área da região assinalada através das integrais.



Fonte: UNESP, 2012. Disponível em: <http://www.calculo.iq.unesp.br/>.

4 APLICAÇÕES

A aplicação do cálculo, a partir de estudos além de dados experimentais, prova ser eficaz na determinação de parâmetros, que de outra forma teriam que ser estimados (matemática estatística) ou dependeriam de dados em tabelas de bibliografia especializada para serem conhecidos. Porém, sabe-se que, para conhecermos com segurança determinados parâmetros em processos de manufatura, em fenômenos físicos ou em parâmetros de construção, entre outros, temos que ter dados confiáveis, principalmente quando se trata de conhecer a capacidade real de equipamentos, para obter seu melhor rendimento e também aumentar a sua vida útil.

Os estudos de probabilidade, estatística, dinâmica dos fluidos e eletricidade, para mencionar só alguns, conduzem de maneira natural a funções de mais de uma variável, ou seja, ao cálculo além de que a matemática destas funções é uma das mais extraordinárias realizações da ciência.

4.1 Na Mecânica

Segundo George B. Thomas, a princípio, o Cálculo foi inventado para atender às necessidades matemáticas e, em sua maioria, mecânicas, dos cientistas dos séculos XVI e XVII. O Cálculo Diferencial tratou o problema de calcular taxas de variação, permitindo a definição dos coeficientes angulares das curvas, da velocidade e da aceleração de corpos em movimento e determinação dos ângulos a que seus canhões deveriam ser disparados para obter o maior alcance, além de prever quando os planetas estariam mais próximos ou mais distantes entre si. O Cálculo Integral trabalhou com o enigma de determinar uma função a partir de informações a respeito de sua taxa de variação, possibilitando o cálculo da posição futura de um corpo a partir de sua posição atual, conhecendo-se as forças atuantes sobre ele, a determinação das áreas de regiões irregulares no plano, do volume e da massa de sólidos arbitrários e a medição do comprimento de curvas. Ou seja, os estudos no Cálculo sempre estiveram ligados às tecnologias de cada época, não sendo diferente na atualidade.

Hoje, integração para campos vetoriais, por exemplo, é usada por matemáticos e engenheiros para descrever o movimento de fluidos, projetar cabos de transmissão subaquáticos, explicar o fluxo de calor nas estrelas e calcular o trabalho necessário para colocar um satélite em órbita.

Na mecânica dos fluidos, o cálculo nos auxilia em métodos como as equações de Navier - Stokes, por exemplo, onde, com valores exatos dos parâmetros, podemos adequar e obter através da mecânica lagrangiana valores exatos para descrever o movimento de fluidos em regimes caóticos. Hoje tais dados são encontrados ou obtidos por experimentos ou por constantes hipotéticas bem como encontrados em bibliografias especializadas, auxiliando assim na obtenção de variáveis para posterior planejamento de processos e equipamentos mais precisos tirando como parâmetros à aerodinâmica, por exemplo.

Fig.3 – Forma tridimensional instável das equações de Navier-Stokes

Coordinates: (x,y,z) Time : t Pressure: p Heat Flux: q
Velocity Components: (u,v,w) Density: ρ Stress: τ Reynolds Number: Re
Total Energy: Et Prandtl Number: Pr

Continuity:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

X – Momentum:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right]$$

Y – Momentum:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right]$$

Z – Momentum

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]$$

Energy:

$$\frac{\partial(E_T)}{\partial t} + \frac{\partial(uE_T)}{\partial x} + \frac{\partial(vE_T)}{\partial y} + \frac{\partial(wE_T)}{\partial z} = -\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} - \frac{1}{Re_r Pr_r}\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right]$$
$$+ \frac{1}{Re_r}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz})\right]$$

Fonte: NASA, 2012. Disponível em: < http://www.grc.nasa.gov>

A força exercida por um fluido sobre uma superfície, com profundidade constante, uma vez que se tenha a pressão de um fluido em termos de força por unidade, pode ser fácil mente calculada por **P=F/A** onde **P=pressão**, **F=Força** e **A=Área.** Entretanto, suponhamos que uma placa vertical submersa na densidade de um fluido se move na vertical no eixo *y*. A força exercida pelo fluido de encontro à uma superfície da placa será

$$\mathbf{F=W} \Rightarrow \int_a^b \mathbf{h(y)L(y)d(y)},$$

onde h(y) é a profundidade e L(y) é o comprimento medido horizontalmente da esquerda para direita sobre a superfície da placa e nível, todos em função da altura (y).

Outra aplicação seria o caso de engenharia de voo que frequentemente se usa cálculo no planejamento de missões longas. Para lançar uma sonda, devem-se considerar as diferentes velocidades em órbita da Terra e do planeta; a sonda deve estar projetada para outras influências gravitacionais como o sol e a lua. Então, o cálculo permite que cada uma dessas variáveis sejam aplicadas com precisão.

É também importante na aplicação do cálculo, o conceito de derivada temporal, que é a taxa de mudança ao longo do tempo, e que é necessária para a definição precisa de vários importantes conceitos. Em particular, as derivadas temporais da posição de um objeto são importantes na física newtoniana – Velocidade e Aceleração, amplamente usada na mecânica para calcular impactos, balística, vida útil de máquinas, etc.

Um Engenheiro Mecânico usa cálculo para encontrar o centro de massa de um veículo utilitário esportivo para projetar características de segurança adequadas, que devem aderir às especificações federais em estradas diferentes e em velocidades diferentes.

Outro excelente exemplo para demonstrar a importância e aplicação do cálculo na engenharia mecânica, é a Derivada material. A derivação, acompanhado o movimento de uma partícula, é chamada de substantiva ou derivada lagrangiana.

A derivada material é definida pelo operador:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\cdot)$$

Onde $\mathbf{V}$ é a velocidade do fluido. O primeiro termo do lado direito da equação é a derivada tradicional de Euler (isto é, a derivada com referência a um ponto fixo de referência), contudo o segundo termo representa as mudanças trazidas pelo movimento do fluido.

Em poucas palavras, esta ferramenta mede mudanças na velocidade de todas as partículas que passam através de um ponto fixo no espaço à medida que ele se move com o fluido. A mesma situação surge com medidas da mudança da densidade, temperatura, etc.

4.2 Na Engenharia Civil

As disciplinas das cinco áreas do currículo do curso de Engenharia Civil (Construção Civil, Estruturas, Geotecnia, Hidráulica e Saneamento e Transporte) podem ser analisadas com referência às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Ordinárias, sendo possível analisar outras.

Para esta análise foram pesquisados alguns problemas cujas soluções requeriam o uso do Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Ordinárias.

Segundo o Departamento de Engenharia Civil da UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto), através de uma lista, foram apresentadas questões a serem solucionadas nas diferentes áreas do Curso de Engenharia Civil, relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral e às Equações Diferenciais, questões estas representadas de maneira bastate resumida no quadro a seguir:

Fig.4 – Utilização do cálculo diferencial e Integral e Equações Diferencias na Engenharia Civil.

Áreas	Cálculo Diferencial e Integral	Equações Diferenciais
Construção Civil	Não utiliza (*)	Não utiliza (*)
Estruturas	1.Cálculo de reações de apoio e esforços solicitantes (normal, cortante e momento fletor) em peças submetidas a diversos tipos de esforços 2. Dimensionamento de peças de estruturas metálicas submetidas a vários tipos de esforços	1.Determinação de flechas em vigas fletidas 2.Problemas de teoria da elasticidade 3.Cálculo de Placas
Geotecnia	1.Cálculo de empuxo de terra 2.Cálculo de vazão em ensaios de bombeamento 3.Obtenção de estados de deformação conhecido o campo de deslocamento (campo vetorial) 4.Problemas de teoria da elasticidade	1.Problema de fluxo permanente 2.Problemas de fluxo transiente saturado (adensamento)
Hidráulica e Saneamento	1.Traçado de perfil de linha d'agua em escoamento de condutos livres 2.Vazão através de vertedouros 3.Conservação de massa e equação da continuidade 4.Esvaziamento de reservatórios 5.Diâmetro econômico de uma instalação de recalque 6.Profundidade crítica de canais 7.Teorema de Euler- quantidade de movimento 8.Seção de máxima eficiência hidráulica	Não foram listados

Fonte: UFOP, 2012. Dsponível em: <http://www.em.ufop.br/deciv/>

4.3 Cálculo na Elétrica

Um engenheiro elétrico usa, entre outras coisas, integração para determinar o comprimento exato do cabo de força necessário para conectar duas subestações que estão à milhas de distância. Devido o cabo estar suspenso a partir de pólos, ele é constantemente curvilíneo. O cálculo permite um número preciso para determinar estes dados.

Na engenharia elétrica também se faz o frequente uso de cálculo para resolver problemas com circuitos elétricos e de tensão. Especificamente, as Equações de Maxwell são uma das principais ferramentas de um engenheiro elétrico para problemas com carga e resolução de problemas atuais.

Integral form

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi k q$$

Differential form

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 4\pi k \rho$$

Forma integral e derivativa das equações de maxwell.

Outro bom exemplo do uso de cálculo Diferencial na elétrica é a lei de Ohm. De acordo com a Lei de Ohm para um condensador de corrente é proporcional ao tempo *derivado* da tensão deste condensador (**I= C . dv/dt).** Ela indica que a diferença de potencial (*V*) entre dois pontos de um condutor é proporcional à corrente elétrica (*I*).

Aplicando-se os cálculos desta lei, temos a simples formula conhecida por todos: R=V/I.

Outra forma de dizer isto é afirmar que os capacitores *diferenciam* a tensão com relação ao tempo, e expressam a *derivada* da tensão como uma corrente.

4.4 Outras aplicações

O cálculo pode nos dar um método generalizado de encontrar a inclinação de uma curva. A inclinação de uma linha é bastante elementar; usando um pouco de álgebra básica pode ser encontrada embora quando, se está lidando com uma curva, a história é diferente. O cálculo permite descobrir como uma curva acentuada irá inclinar a qualquer momento. Isto pode ser muito útil em qualquer área de estudo.

Embora tenhamos métodos padrão para calcular a área de algumas formas, o cálculo nos permite fazer muito mais. Tentando encontrar a área em uma forma com métodos ortodoxos, seria completamente inviável não fosse por cálculo.

Sem uma ideia como o "Teorema do Valor Intermediário" seria excepcionalmente difícil de encontrar ou sequer saber que existe uma raiz em algumas funções. Usando o método de Newton você também pode calcular uma raiz irracional de algum grau de precisão, algo que sua calculadora não seria capaz de dizer se não fosse por cálculo.

Fig.5 – Gráfico demonstrativo de uma raiz irracional.

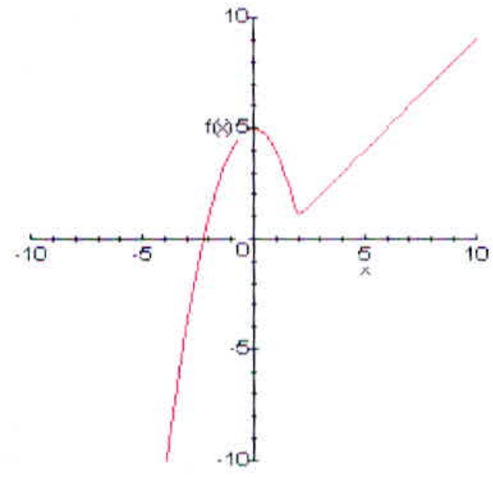
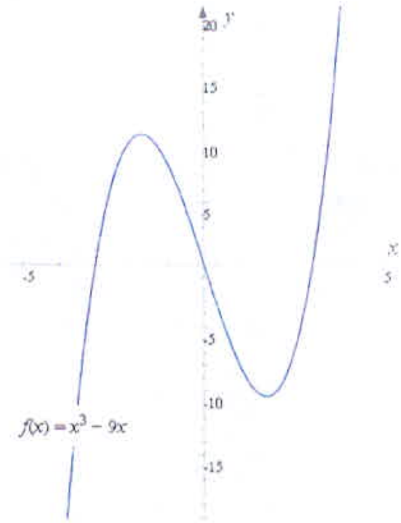


Fig.6 – Gráfico (y=x³-3x+3)



Fonte: THOMAS, George B. **CÁLCULO.** Pág. 11; pág. 749

Usando cálculo, podem-se criar gráficos praticamente de qualquer função ou equação. Na verdade, é possível descobrir valores máximos e mínimos, taxas de variações que aumentam e diminuem e muito mais, mesmo sem gráficos um ponto, todos usando cálculo.

Uma função pode representar muitas coisas. Um exemplo é o caminho de um avião. Usando cálculo você pode calcular sua média altitude de cruzeiro, velocidade e aceleração. O mesmo vale para um carro, ônibus ou qualquer outra coisa que se move ao longo de um caminho. Agora, o que você faria sem um velocímetro em seu carro?

Fig.7 – Trajetória de uma aeronave

Fonte: Disponível em: <http://www.finflo.fi/company.html>

Ao utilizar a otimização de funções em apenas alguns passos que você pode responder a questões muito práticas e úteis, tais como: "Você tem pedaço quadrado de papelão, com lados de 1 metro de comprimento. Usando esse pedaço de placa de cartão, você pode fazer uma caixa, que são as dimensões de uma caixa contendo o volume máximo? Esses tipos de problemas são um resultado maravilhoso do que pode ser feito usando o cálculo.

5 CONCLUSÃO

As necessidades do homem, com os mais variados propósitos, fizeram dele, através dos tempos, um estudioso dos produtos naturais bem como de suas causas e efeitos. Suas constantes buscas, o fez perceber que tudo e todos se relacionam de tal forma que nenhum efeito tem origem numa única causa e isto lhe fez pensar e buscar ainda mais as respostas para as questões pertinentes às suas respectivas épocas.

Desta forma, surgiram ditados populares, como: "Uma coisa depende de outra" ou "Uma coisa está em função de outra". Não é raro também revistas ou artigos publicarem gráficos, sobre diversos assuntos, mostrando a interdependência entre os fatores em estudo.

Esta ideia de um fator variar em função de outro ou de se representar tal variação através de gráficos, de certa forma, já se tornou familiar.

Hoje, o cálculo é usado em todos os ramos da ciência e engenharia, nos negócios, na medicina (para resolver problemas complexos, tais como o diagnóstico de pacientes) em direito (necessária para planejar uma acusação), e em praticamente tudo onde o objetivo é a solução ideal para um problema que pode ser dada em forma matemática.

Obviamente, uma vasta variedade de carreiras utiliza regularmente cálculo. Universidades, militares, agências governamentais, companhias aéreas, indústria de entretenimento, empresas de software e empresas de construção são apenas alguns exemplos que procuram pessoas com um sólido conhecimento de cálculo daí a importância de seu estudo. Mas, como pode ser visto neste trabalho, não é somente o seu aprendizado que tem importância em nossas vidas e sim o cálculo em si foi necessário para que se obtivesse toda a tecnologia e, por conseguinte, o conforto da vida moderna como se tem hoje.

Apesar de sua mística como um ramo mais complexo da matemática, o cálculo toca a vida cada vez mais e de maneiras muito diversas e indispensáveis.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **EPISÓDIOS DA HISTÓRIA ANTIGA DA MATEMÁTICA.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

A MATEMÁTICA INTERATIVA NA INTERNET. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/arquimedes.html>. Acesso em 22/09/2012.

ATOM, postagens. Disponível em: <http://ficaqui5.blogspot.com.br/p/aplicacoes-do-calculo.html>. Acesso em: 22/09/2012.

DIJKSTERHUIS, E. J. Arquimedes. **O MÉTODO - INTRODUÇÃO E NOTAS.** Luis Vega. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

HISTÓRIA INTEGRAIS. Disponível em: <www.cepa.if.usp.br> Acesso em: 29/09/2012.

HOFFMANN, Laurence, G. L. Bradley; **CÁLCULO, UM CURSO MODERNO E SUAS APLICAÇÕES**, 6.Ed., LTC Editora, Rio de Janeiro (1999).

NASA. Disponível em: < http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/nseqs.html >. Acesso em: 03/10/2012.

THOMAS, George B. – **CÁLCULO** – 11. Ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. V.1.

UFOP. Disponível em: <http://www.em.ufop.br/deciv/>. Acesso em: 29/09/2012.

UNESC. postagens. Disponível em: <http://www.bib.unesc.net>. Acesso em: 22/09/2012.

UNESP. Disponível em: <http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/IntegralDefinida_obs.html>. Acesso em: 22/09/2012.

WHITE, Michael. **Galileu/Newton.** Coleção Os Pensadores. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

Al-TUSI, S. Al Din, **(EUVES MATHEMATIQUES. ALGEBRE ET GEOMETRIE AU XII SIÈLE**. Texte établi et tr. Par R. Rashed. Paris, Science et philosophie árabes. Les Belles Lettres, 1986. 2.V. [USP].

ANEXO A: TERMO DE ACEITE PARA ORIENTAÇÃO DE MONOGRAFIA

Eu, ÉRIK VITOR DA SILVA na condição de Orientador (a) declaro aceitar o(a) discente RAFAEL DE FREITAS PINTO, regularmente matriculado (a) no Curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário do Sul de Minas Unis MG para orientá-lo na elaboração do seu trabalho de conclusão de curso.

Varginha, ____ de ____________de 2012.

_______________________________ _______________________________

Rafael de Freitas Pinto Érik Vitor da Silva